

11ο μάθημα

18/5/20

$$V(z y^2 - x^3 + x z^2)$$

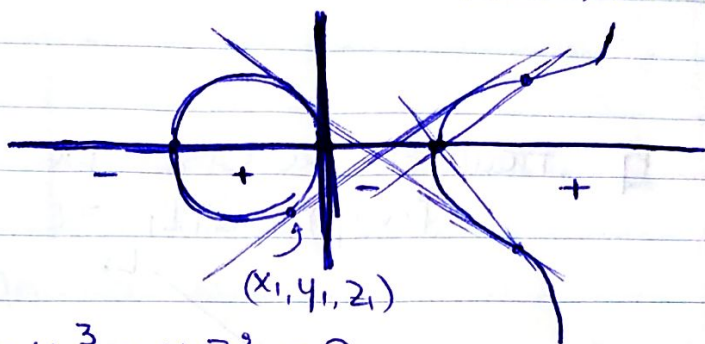
$$(10, 0, 11) = \left(\frac{10}{11}, 0, 1 \right)$$

Απόσπασμα

$$y^2 - x^3 + x = 0$$

$$y^2 = x^3 - x$$

$$= x(x-1)(x+1)$$



$$z_1 y_1^2 - x_1^3 + x_1 z_1^2 = 0$$

Εφαπτ. στο (x_1, y_1, z_1) :

$$(-3x_1^2 + z_1^2)x_1 + 2z_1 y_1 y_1 + (y_1^2 + 2x_1 z_1)z_1 = 0$$

$$\downarrow (10, 0, 11)$$

$$(-3x_1^2 + z_1^2) \cdot 10 + 2z_1 y_1 \cdot 0 + (y_1^2 + 2x_1 z_1) \cdot 11 = 0$$

Άρα έχω:

$$\begin{cases} z y^2 - x^3 + x z^2 = 0 \\ -30x^2 + 10z^2 + 11y^2 + 22xz = 0 \end{cases}$$

Έχει σημεία
τομή στο ∞ ?

$z=0$

Κοινά σημεία στο ∞ (γιατί
μ' ενδιαφέρει το σύστημα):

$$\begin{cases} x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 11y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases} \rightarrow (0, 0, 0)$$

Αρα δευ έχει κινείται κοινά σημεία στο ∞ .
 Πάω να βρω τα υπόλοιπα

$$\downarrow z=1$$

$$\int y^2 = x^3 - x$$

$$\int -30x^2 + 10 + 11y^2 + 22x = 0$$

Αντικαθιστώ κ' έχω:

$$-30x^2 + 10 + 11(x^3 - x) + 22x = 0$$

$$\Rightarrow -30x^2 + 10 + 11x^3 - 11x + 22x = 0$$

$$\Rightarrow 11x^3 - 30x^2 + 11x + 10 = 0$$

$$\Rightarrow 11x^2(x-2) - 8x(x-2) - 5(x-2) = 0$$

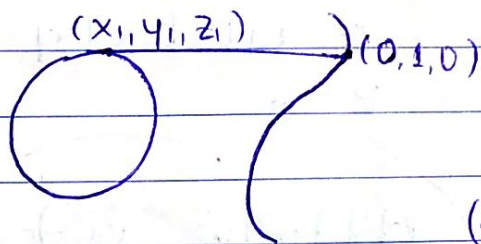
$$\Rightarrow (x-2)(11x^2 - 8x - 5) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot 5 \cdot 11}}{2 \cdot 11} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 55}}{11} = \frac{4 \pm \sqrt{71}}{11}$$

↳ 6 εφαπτ.

$$V(z^2 - x^3 + xz^2) \quad P = (0, 1, 0)$$

Πόσα εφαπτ. μπορώ να φέρω στην κοίτη μου?



$$z_1 y_1^2 - x_1^3 + x_1 z_1^2 = 0$$

Αρα εφαπτ. στο (x_1, y_1, z_1) :

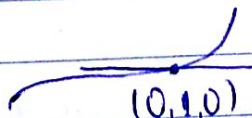
$$(-3x_1^2 + z_1^2)x_1 + 2z_1 y_1 z_1 + (y_1^2 + 2xz_1)z_1 = 0$$

Αρα έχω να λύσω:

$$\int z^2 - x^3 + xz^2 = 0$$

$$\int z^2 = 0 \Rightarrow z = 0 \quad \eta \quad y = 0$$

i) $\boxed{z=0}$: $-x^3 = 0 \Rightarrow x=0 \rightarrow (0, 1, 0)$ τριγωνί ρίζα
 (σημείο κοίτης)



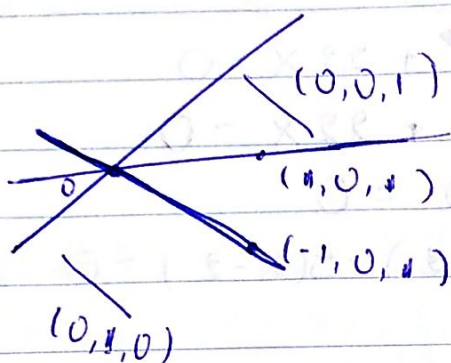
ii) $\boxed{y=0}$: $-x^3 + xz^2 = 0 \Rightarrow x(z^2 - x^2) = 0$
 $\Rightarrow x(z-x)(z+x) = 0 \Rightarrow (0, 0, 1), (1, 0, 1), (-1, 0, 1)$

Ευθεία που διέρχεται από τα $(0,1,0)$, $(1,0,1)$:

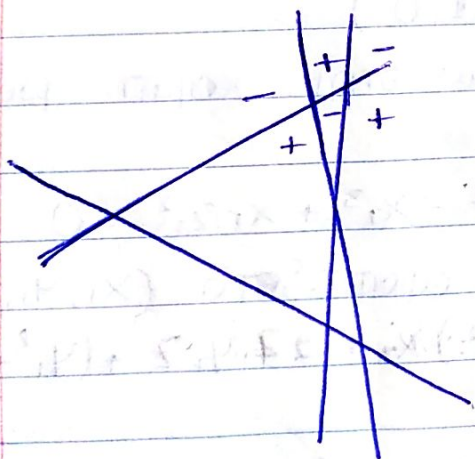
$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = X - Z$$

κ: αντίστ. από τα άλλα σημεία:

$$X \quad \kappa: \quad X - Z$$



Klein του θ .



$$L_1 L_2 L_3 L_4 = 0$$

$$z = L_1 L_2 L_3 L_4$$

$$z = \varepsilon$$

Αλλάζω ευθεία,
αλλάζω πρόσημο

$V(F) \in \mathbb{P}_c^2$

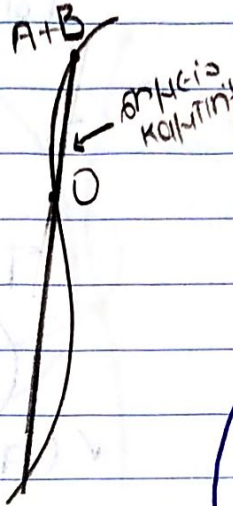
↑ κυβική

Θα κείνω μια ομάδα

με στοιχεία τρι σημεία της
καμπύλης

Για να κείνω την ομάδα:

Ορίσω ένα σύνολο στοιχείων κ. ορίσω μια
πράξη: $(V(F), +)$



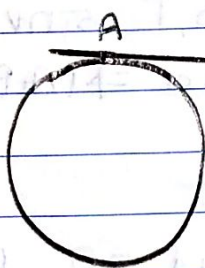
Θα πρέπει να
ορίσω το σημείο
 $A+B$

Παίρω σημείο καμπύλης O
κ. ορίσω μια ομάδα

(Αν επιπλέον είλω σημείο
καμπύλης θα ορίσω άλλη
ομάδα. Οι δύο ομάδες
αυτές είναι ισομορφικές)

Ορίσει καλά
την ομάδα μου?

Όχι! Αν
 $B=A$?

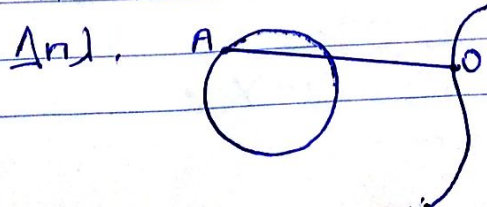


Καύσους χορδή - εφαπτομή.

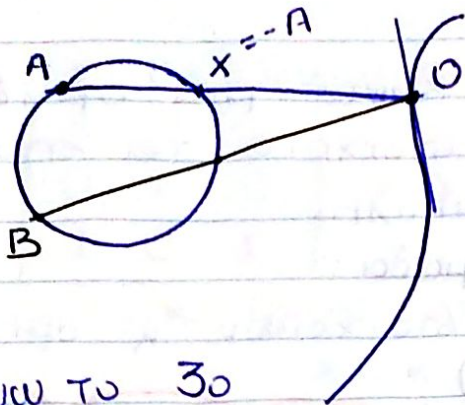
Θ.ο.ο. O : ουδέτερο
σημείο

δηλ. $A+O = A = O+A$

$A+O =$ Τι κείνω? ... Συνώνυμο το A με το O



$A+O = A$



Ευώνυμο το 3ο
σημείο τομή
(το O) με το O',
δηλ. φέρω εφαπτ.

Θ.α.ο. X αντίθετο
του A

$$A + X = 0$$

είσαι $X = -A$

Με παρόμοιο τρόπο

$$A + B = B + A$$

(δηλ. αβελιανή)

Τι δεν εδείξα ?

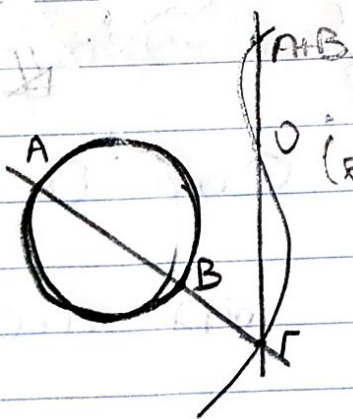


Προβλεψιμότητα

(Δυσκόλο...
Θέλει καλό σχήμα)

$$\checkmark (A+B) + \Gamma = A + (B+\Gamma)$$

Γεωμετρικές ιδιότητες:

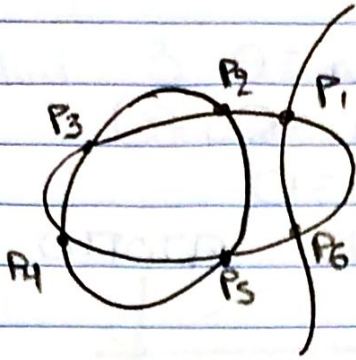


O (σημείο κοίτης)

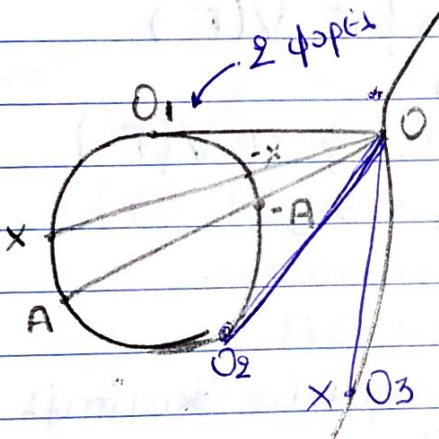
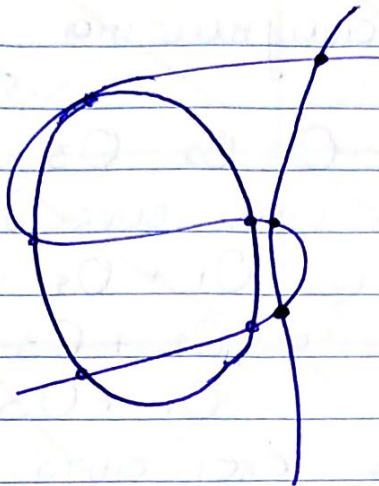
A, B, Γ στην ίδια
ευθεία $\Rightarrow A + B + \Gamma = 0$

$$A + B + \Gamma = 0 \quad (-) \rightarrow X = \Gamma$$

$$A + B + X = 0$$



$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 0$$



$$\begin{aligned}
 -O_1 &= O_1 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{σημείο} \\ \text{ταξινότ} \end{array} \\
 O_1 + O_1 + 0 &= 0 \\
 \Rightarrow 2O_1 &= 0 \\
 \Rightarrow O_1 + O_1 &= 0 \\
 \Rightarrow -O_1 &= O_1
 \end{aligned}$$

∃ οι 3 τα τέτοια σημεία \mathbb{R}
 ΝΑΙ !

Τρία σημεία ταξινότ $\{O_1, O_2, O_3\}$

$$O_1 + O_2 + X = 0$$

$$O_1 + O_2 + X = 0$$

$$\frac{2O_1 + 2O_2 + 2X = 0}{\Rightarrow 2O_1 + 2O_2 + 2X = 0}$$

$$\Rightarrow 2O_1 + 2O_2 + 2X = 0$$

$$\Rightarrow 2X = 0$$

$$\Rightarrow O(X) \mid 2 \Rightarrow O(X) = 1 \text{ ή } 2$$

$$X \in \{0, O_1, O_2, O_3\}$$

$$\bullet X = 0 : O_1 + O_2 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow O_1 = -O_2 = O_2$$

ΑΤΟΠΟ

$$\begin{aligned} \bullet X=0_1 : 0_1 + 0_2 + 0_1 &= 0 \\ \Rightarrow 2 \cdot 0_1 + 0_2 &= 0 \\ \Rightarrow 0 + 0_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0_2 = 0 \quad \text{ΑΤΟΠΟ}$$

• Ομοίως αν $X=0_2$

αίρα αναγκαστικός

$$X=0_3$$

αίρα $0_1, 0_2, 0_3$ συνευθειακά
κ' επειδή είναι συνευθειακά

$$\text{έχουμε ότι : } 0_1 + 0_2 = -0_3 = 0_3$$

$$\text{κ' } 0_2 + 0_3 = 0_1$$

$$0_1 + 0_3 = 0_2$$

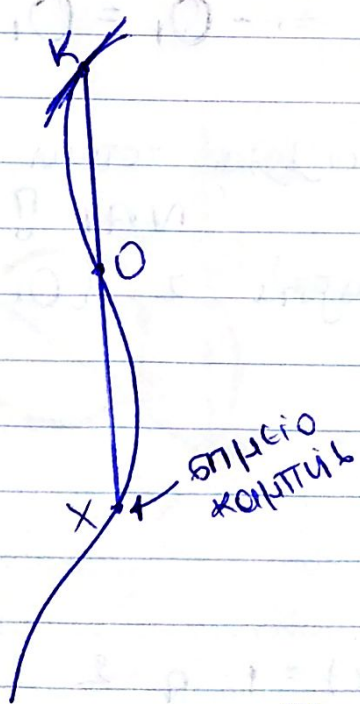
Τι συνεπεία έχει αυτός ?

$$\{0, 0_1, 0_2, 0_3\} \subseteq V(F)$$

κλειστή

$$\{0, 0_1, 0_2, 0_3\} \triangleleft V(F)$$

$$\approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$$



K σημείο καμπύλης

$$0, K_1, K_2$$

$$3K_2 = 0 \quad \leftarrow \text{ταίφης } 3$$

$$K + 0 + X = 0$$

$$K + 0 + X = 0$$

$$K + 0 + X = 0$$

$$3K + 3 \cdot 0 + 3X = 0$$

αίρα X σ. καμπύλης

$$\text{Έστω } K_i + K_j = 0$$

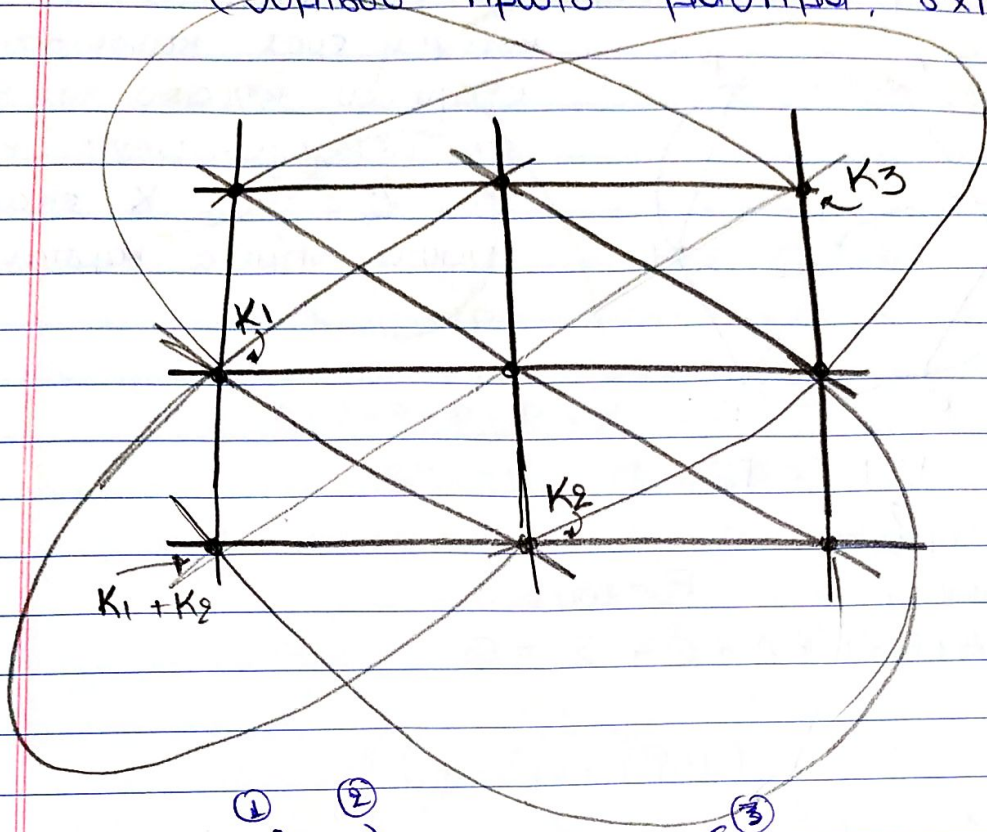
$$3K_i + 3K_j + 3X = 0$$

$$0 + 0 + 3X = 0$$

$$3X = 0$$

αίρα X
σημείο
καμπύλης

Αυσι 3 βρίσκονται στην ίδια ευθεία
 (Σταθερά πρώτο παράγωγο, σχήμα...)



$\begin{matrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & & \textcircled{3} \\ \downarrow & \downarrow & & \swarrow \\ \{0, K_1, K_2, \dots, K_8\} & \approx & \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \end{matrix}$

υποομοιομορφία

Αβελιανή

\mathbb{Z}_9

$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

Αν 2. Τα σημεία κομπίνας κοινού για ομοιομορφία
 που είναι $\approx \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$